РЕСПУБЛИКАНСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ НА КУБОК имени Ю.А. ГАГАРИНА

2017-2018 учебный год

КУБОК ГАГАРИНА олимпиада школьников

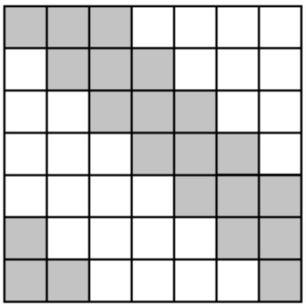
МАТЕМАТИКА

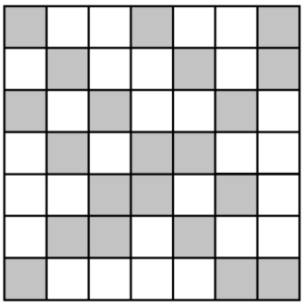
ОТВЕТЫ РЕСПУБЛИКАНСКОГО ЭТАПА — 7 класс

1. Нет, не могли.

Решение. От противного. Предположим, что мы смогли получить на доске числа 2, 3, ..., 9, 10, 2018. Заметим, что после каждой операции сумма чисел, написанных на доске, увеличивается на 2. Изначально она была равна 55. То есть после каждой операции сумма чисел, написанных на доске, будет нечетной. Однако сумма 2+3+...+10+2018=2072 – четна. Противоречие.

2. *См. рисунки*





3. *Решение.* При Петиных разрезаниях получаются только выпуклые многоугольники. При разрезании треугольника одна из частей тоже будет треугольником, поэтому число треугольников не уменьшается. Разрез может увеличить число сторон многоугольника только на 1, и при этом будет отрезан треугольник. Если мы увеличим число сторон 100 раз, то уже получим 100 треугольников. Иначе мы увеличили число сторон не более 99 раз, поэтому у каждого многоугольника не более 4+99=103 сторон. Значит, у нас есть не более 100 типов многоугольников. Но после того, как у нас станет 9901 часть, многоугольников какого-то типа станет по принципу Дирихле не менее 9901:100>99, то есть не менее 100.

4. 49.

Решение: Рыцарей больше половины, следовательно:

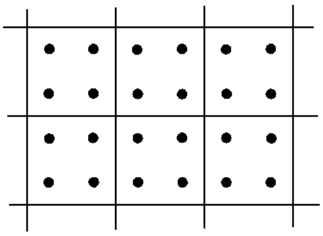
1) Либо они чередуются вот так: РЛР...ЛР, но этот вариант не подходит: фразу про «рыцарей вдвое больше, чем лжецов» не может произнести ни один рыцарь, но этих фраз больше 50.

2) Либо какие-то два рыцаря стоят рядом. Двое стоящих рядом рыцарей не могут оба произнести одинаковые фразы, а различные фразы они могут сказать только в одном случае: третий говорит, что рыцарей перед ним столько же, сколько и лжецов, а четвертый – что рыцарей перед ним вдвое больше, чем лжецов (это получается несложными уравнениями). Больше нигде рыцари рядом не стоят, следовательно, чтобы их было хотя бы 50, картинка может быть только такой: РЛРРЛЛР...ЛР. Все рыцари, кроме первого и четвертого слева, точно говорят, что

слева от них поровну рыцарей и лжецов, т.к. больше сказать ничего не могут. Их 48. Чтобы противоположных фраз было больше 50, все оставшиеся должны говорить именно их. Следовательно, все лжецы, которых всего 49, говорят первую фразу.

5. 2500 деревьев.

Решение. Разобьем деревья на 2500 четверок, как показано на рис.



В каждой такой четверке нельзя срубить более одного дерева. С другой стороны, можно срубить все деревья, растущие в левых верхних углах квадратов, образованных нашими четверками деревьев. Поэтому наибольшее число деревьев, которые можно срубить, равно 2500.

6. *Решение.* Пусть 2m – наибольшее, а 2n – наименьшее количество конфет у одного человека. После одного круга обмена и, возможно, добавления конфет извне, m не увеличится, а количество людей, имеющих 2n конфет, уменьшится. (Действительно, каждый человек оставляет себе не более m конфет, а получает не более m + 1 конфеты. Причём, если он получил m + 1 конфету, то одна из них была добавлена извне, значит, после получения m конфет у него стало не более 2m – 1 конфеты. С другой стороны, если m > n, среди людей, имевших 2n конфет, найдётся человек, который получит более n конфет.) Значит, через несколько шагов n увеличится. Так как n увеличивается, а m не увеличивается, наступит момент, когда n станет равным m.

7. *Решение.* Будем считать, что если рядом стоят две фишки одинакового цвета, то они соединены дугой. Тогда нам нужно доказать, что существует такая расстановка фишек на окружности, в которой нет дуг. Пусть имеется какая-то расстановка фишек по кругу; докажем, что фишки можно переставить таким образом, что в новой расстановке число дуг уменьшится. В самом деле, пусть, например, в расстановке две черные фишки соединены дугой. Тогда на окружности обязательно найдутся две нечерные фишки, стоящие рядом. Действительно, если бы рядом с каждой нечерной фишкой стояли черные, да еще две черные стояли рядом, то черных фишек было бы больше половины, а это противоречит условию. Возьмем теперь одну из упомянутых нечерных фишек и поставим ее между двумя черными. При этом число дуг в новой расстановке, очевидно, уменьшится. Так как число дуг в расстановке не может оказаться меньше нуля, то в конце концов мы получим расстановку фишек на окружности без дуг.

8. 8 перебежек.

Решение. Занумеруем детей по возрастанию роста – 1, 2, ..., 10.

Оценка. Два ребенка могут остаться и не менять своего расположения по кругу. Остальные 8 детей обязаны занять свои места согласно росту. Потому максимальное количество необходимых перебежек равно 8. Если было меньше восьми перебежек, то какие-то трое детей остались на своих местах, а их порядок противоположен нужному.

Пример. Пусть изначально дети стояли в обратном порядке. Перебежки делаем так: 1-й и 2-й остаются на своих местах, 3-й перебегает и встаёт за 2-м, потом 4-й – за 3-м и т.д..